

מתמטיקה בדידה

פרק 13 - זהויות קומבינטוריות והבינום של ניוטון

תוכן העניינים

1. הבינום של ניוטון.....1

הבינום של ניוטון

שאלות

(1) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

(2) הוכיחו לכל $n \geq 0$ את הזהות $6^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{2n-k}$.

(3) הוכיחו את השוויון

$$2^n = 3^n - n3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} - \dots + (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 3^0$$

(4) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$.

(5) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{m+n}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn$.

(6) הוכיחו כי $\binom{2n}{n}$ זוגי לכל $n \in \mathbb{N}$.

(7) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{n}{3} \cdot 3^n$.

(8) הוכיחו כי $\forall x, y, n \in \mathbb{N}^+, \binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$.

(9) הוכיחו את השוויון $\sum_{k,j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k+j} = \binom{3n}{n}$.

(10) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$.

(11) הוכיחו שלכל $n \geq 0$ ולכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$

(12) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 1 = \frac{\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2}}{n!}$$

(13) הוכיחו את הזהות $\sum_{k=1}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k} = 6n^2 \binom{5n-2}{n-2}$

(14) הוכיחו את השוויון $\sum_{n=0}^N \binom{k-1+n}{n} = \binom{k+N}{N}$

(15) הוכיחו כי אם $n > 0$ זוגי, אז $2^n > \binom{n}{\frac{n}{2}}$

(16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{7})^{80}$ שלמים?

(17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $n^n - (n-1)^n = \sum \binom{n}{i} (n-1)^{n-i}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il